УДК 514.753.28

НЕГОЛОНОМНЫЕ КОМПЛЕКСЫ В ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Р.Н. Щербаков, Н.Р. Щербаков

Томский государственный университет
E-mail: nrs@math.tsu.ru

Продолжение начатого ранее изучения неголономных геометрических образов. Построен репер неголономного комплекса прямых. Прослеживается характерное для неголономной геометрии раздвоение понятий аффинного центра, конгруэнции W, главного регулюса.

1. Построение репера. Аффинные центры первого и второго рода

В работе [1] построен канонический репер неголономной поверхности. Следующим этапом будет изучение линейчатых неголономных геометрических образов. Совокупность всех прямых трёхмерного пространства зависит от четырёх параметров t^0, t^1, t^2, t^3. Линейчатый комплекс, т.е. трёхпараметрическое семейство прямых в эквиаффинном трёхмерном пространстве A_3, можно задать [2] одним вполне интегрируемым уравнением Пфаффа относительно этих параметров

$$f^{\alpha}(t_0,t_1,t_2,t_3)dt_{\alpha}=0, \quad \alpha=0,1,2,3. \qquad (1)$$

Неголономный комплекс можно определить как совокупность интегральных регулюсов (линейчатых поверхностей, рассматриваемых как 1-семейства прямых [3]), одного не вполне интегрируемого уравнения Пфаффа. Впервые понятие неголономного комплекса было введено Н.И. Кованцовым в [4].

Деривационные формулы репера $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ запишем в виде

$$d\boldsymbol{A}=\Omega^i\boldsymbol{e}_i,\;\; d\boldsymbol{e}_i=\Omega_i^j\boldsymbol{e}_j,\quad i,j=1,2,3,$$
$$\Omega_1^1+\Omega_2^2+\Omega_3^3=0,$$

где формы Пфаффа $\Omega^i\equiv\Omega_0^i$, Ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$D\Omega_\alpha^i=\Omega_\alpha^j\wedge\Omega_j^i,\;\; \alpha=0,1,2,3 \qquad (2)$$

и, согласно общей теории подвижного репера [3],

$$\Omega_\alpha^i=\pi_\alpha^i+\omega_\alpha^i,$$

где

$$\pi_\alpha^i=h_\alpha^{i\sigma}(t,\tau)d\tau_\rho,\;\; \omega_\alpha^i=H_\alpha^{i\sigma}(t,\tau)d\tau_\sigma,$$
$$\rho=1,2,...,12;\;\; \sigma=0,1,2,3.$$

Параметры t и формы ω будем называть *основными* (в литературе можно встретить синонимы: главные, первичные), параметры τ и формы π – *слоевыми* (их часто называют вторичными или групповыми). За параметры τ можно принять координаты векторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{e}_i$ репера относительно неподвижной системы координат.

Включив элемент (прямую) в репер, т.е. положив, что прямая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{e}_3$ есть элемент комплекса, будем иметь

$$\Omega^1=\omega^1,\; \Omega^2=\omega^2,\; \Omega_3^1=\omega_3^1,\; \Omega_3^2=\omega_3^2,$$

т.е. $\pi^1=\pi^2=\pi_3^1=\pi_3^2=0$. Ур. (1) можно записать в виде:

$$\alpha_1\omega^1+\alpha_2\omega^2+\alpha_3\omega_3^1+\alpha_4\omega_3^2=0, \qquad (3)$$

где $\alpha_p=\alpha_p(t,\tau)$, $p=1,2,3,4$. При $\alpha_1=\alpha_2=0$ получается комплекс, содержащий бицилиндрическую голономную конгруэнцию [3]. Его называют *цилиндрическим* и исключают из рассмотрения. Тогда (3) можно переписать в виде

$$\omega^2=\sigma\omega^1+\gamma\omega_3^1+\lambda\omega_3^2. \qquad (4)$$

На луче неголономного комплекса можно ввести главную корреляцию точно так же, как и в случае голономного комплекса: точка <=> касательная плоскость торса, являющегося интегральным для (4) и имеющего эту точку фокусом. Получим

$$\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{e}_3 \iff \{-(t+\lambda)\boldsymbol{e}_1+(\gamma-\sigma t)\boldsymbol{e}_2,\; \boldsymbol{e}_3\}.$$

Главная корреляция вырождится, если

$$\sigma\lambda+\gamma=0.$$

В этом случае неголономный комплекс называется *специальным* [2]. Такие комплексы также исключаются из рассмотрения.

Дифференцируя ур. (3) с использованием (2), получаем

$$d\sigma-\sigma(\omega_1^1-\omega_2^2)-\sigma^2\omega_2^1+\omega_1^2=\sigma_l\theta^l,$$
$$d\gamma-2\gamma\omega_1^1-\lambda\omega_1^2-\sigma\gamma\omega_2^1-\sigma\omega^3=\gamma_l\theta^l, \quad (5)$$
$$d\lambda-\lambda(\omega_1^1+\omega_2^2)-(\gamma+\sigma\lambda)\omega_2^1-\omega^3=\lambda_l\theta^l,$$

где $\theta^1=\omega^1$, $\theta^2=\omega^2$, $\theta^3=\omega_3^1$, $\theta^4=\omega_3^2$, $l=1,...,4$. Из (5) найдём зависимость σ, γ, λ от слоевых (вторичных) параметров. Эта стандартная процедура описана в [3] (см. также [1]). Получаются уравнения:

$$\mathrm{d}\sigma=\sigma(\pi_1^1-\pi_2^2)+\sigma^2\pi_2^1-\pi_1^2,$$
$$\mathrm{d}\gamma=2\pi_1^1-\sigma\pi^3+\lambda\pi_1^2+\sigma\gamma\pi_2^1,$$
$$\mathrm{d}\lambda=\lambda(\pi_1^1+\pi_2^2)+(\gamma+\sigma\lambda)\pi_2^1+\pi^3,$$

которые позволяют провести следующую простейшую фиксацию вторичных параметров

$$\sigma=0,\ \pi_1^2=0,$$
$$\lambda=0,\ \pi^3+\pi_2^1=0,$$
$$\gamma=1,\ \pi_1^1=0.$$

Теперь главная корреляция примет простейший вид

$$\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{e}_3 <=> \{t\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\},$$

что и характеризует геометрически проведённую фиксацию:

$$\boldsymbol{A}<=>\{\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\},\ \boldsymbol{A}_\infty<=>\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3\},$$
$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{e}_3<=>\{\boldsymbol{e}_1-(\pm\boldsymbol{e}_2),\boldsymbol{e}_3\}.$$

Здесь $\boldsymbol{A}_\infty$ – несобственная точка луча. Начало репера $\boldsymbol{A}$ ещё не фиксировано. Уравнение комплекса (4) принимает вид

$$\omega^2=\omega_3^1, \quad (6)$$

а формулы (5) можно переписать в виде

$$\omega_1^2=A\omega^1+B\omega_3^1+C\omega_3^2+\xi\theta,$$
$$2\omega_1^1=E\omega^1+F\omega_3^1+G\omega_3^2+\eta\theta, \quad (7)$$
$$\omega^3+\omega_2^1=H\omega^1+K\omega_3^1+P\omega_3^2+\zeta\theta,$$

где для удобства положено $\theta\equiv\omega^2-\omega_3^1$ (тогда при $\theta=0$ получаем значения левых частей вдоль регулюсов нашего неголономного комплекса).

Простейшим однопараметрическим подмногообразием комплекса является цилиндр. Он имеет уравнения $\omega_3^1=\omega_3^2=0$ уже после включения элемента в репер. Поэтому его касательную плоскость можно определить, пользуясь исходным уравнением комплекса (4). Бивектор этой плоскости имеет вид

$$\{\boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{A}\}\Big|_{\omega_3^1=\omega_3^2=0}=\{\boldsymbol{e}_3,\omega^1\boldsymbol{e}_1+\sigma\omega^1\boldsymbol{e}_2\},$$

откуда сразу видно, что фиксация формы π_1^2 привела к совмещению плоскости $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$ репера с касательной плоскостью цилиндра.

Следующим по значению в аффинной теории комплекса является другое однопараметрическое подмногообразие – *основной цилиндроид*, т.е. регулюс, состоящий из прямых, параллельных касательной плоскости цилиндра. Это подмногообразие впервые рассмотрено в [5, 6] с целью построения канонического репера комплекса (см. также [2. С. 236]). Его дифференциальные уравнения получаются из условий $(\boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{e}_3, d^2\boldsymbol{e}_3)=0$, $\{\boldsymbol{e}_3, d\boldsymbol{e}_3\}||\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3\}$ и могут быть записаны в виде

$$\omega_3^2=0,\ \omega_1^2\equiv A\omega^1+B\omega_3^1=0.$$

Точка прикосновения основного цилиндроида, т.е. точка $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{e}_3$, в которой касательная плоскость торса, имеющего эту точку фокусом, совпадает с касательной плоскостью основного цилиндроида в этой же точке, имеет радиус-вектор

$$\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{A}+\frac{B}{2A}\boldsymbol{e}_3 \quad (8)$$

и называется *аффинным центром первого рода.*

Инфлекционный центр определяется как точка $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{e}_3$ луча, через которую проходит торс, выродившийся в плоскость, и имеющий точку $\boldsymbol{F}$ особой точкой плоского ребра возврата. Торсы, имеющие фокусом точку $\boldsymbol{F}$, можно задать так:

$$\omega^1:\omega_3^1:\omega_3^2=t:(-1):\frac{1}{t+1}.$$

Из условия $(\boldsymbol{e}_3,d\boldsymbol{e}_3,d^2\boldsymbol{e}_3)=0$, означающего обращение торса в плоскость, и условия особенности точки $\boldsymbol{F}$, т.е. $d^2\boldsymbol{F}=0$, находим уравнение для определения координат t_i инфлекционных центров $\boldsymbol{J}_i=\boldsymbol{A}+t_i\boldsymbol{e}_3$ относительно нашего репера:

$$At^4-(B-E)t^3+(C-H-F)t^2+(G+K)t-P=0. \quad (9)$$

Их центр симметрии называется аффинным центром второго рода и имеет радиус-вектор

$$\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{A}+\frac{B-E}{4A}\boldsymbol{e}_3. \quad (10)$$

Мы обнаружили первое «расщепление».

Зависимость коэффициентов $A,...,P$ от слоевых параметров находится обычным путём:

$$\delta A=A\pi_3^3,\ \delta B=-\delta E=2A\pi_2^1,$$
$$\delta C=-C\pi_3^3+B\pi_2^1+\pi_1^3,\ \delta G=-2G\pi_3^3-(2C-F)\pi_2^1,$$
$$\delta H=-H\pi_3^3+E\pi_2^1-\pi_1^3,\ \delta K=-2K\pi_3^3+(2H+F)\pi_2^1, \quad (11)$$
$$\delta F=-F\pi_3^2+2(E-B)\pi_2^1+2\pi_1^3,\ \delta P=-3P\pi_3^3+(G+K)\pi_2^1.$$

Из этих формул следует, что A есть относительный инвариант. Обращение его в нуль влечёт превращение одного из инфлекционных и обоих аффинных центров в несобственную точку луча. Этот случай мы будем исключать из рассмотрения, положив $A\neq0$.

Далее рассмотрим величины

$$L\equiv C+H,\ M\equiv K-G,\ N\equiv B+E. \quad (12)$$

Из (11) следует, что

$$\delta L=N\pi_2^1-L\pi_3^3,\ \delta M=-2M\pi_3^3+2L\pi_2^1,\ \delta N=0. \quad (13)$$

Поэтому совокупность величин L, M, N образует тензор, который называется *тензором неголономности*, так как условие $L=M=N=0$ является необходимым и достаточным условием вполне интегрируемости уравнения $\omega^2-\omega_3^1=0$, то есть условием голономности комплекса.

Величина $N=B+E$ является инвариантом. Обращение её в нуль характеризует совпадение аффинных центров первого и второго рода, как это сразу следует из (8) и (10).

Что касается тензора неголономности, то, записав его в виде

$$N=h_{11},\ -L=h_{12}=h_{21},\ M=h_{22}$$

и учтя, что для инвариантности (относительно замены слоевых параметров) точки $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{e}_3$ необходимо, чтобы имело место $\delta t=-t\pi_3^3$, получим, что в силу (13) инвариантным будет и уравнение

$$h_{ij}t^it^j=0,$$

где $t^1:t^2=$t. Определяемые этим уравнением точки известны под названием «точек неголономности» (см. о них [7–9]).

Канонизации репера по формулам (11) можно производить различными способами. Мы проведём прежде всего фиксацию

$$P=0,\ \pi_2^1=0,\ G+K\neq 0, \qquad (14)$$

которая помещает начало репера в инфлекционный центр (не кратный в силу $G+K\neq 0$), как это сразу видно из (9).

Теперь для фиксации π_1^3 можно взять любую комбинацию δC, δH, δF, кроме $\delta(C-H-F)\equiv 0$, так как $C-H-F$, как и все коэффициенты ур. (9), стали инвариантами. Мы проведём фиксацию

$$H+F=0,\ \pi_1^3=0, \qquad (15)$$

при которой не накладывается никаких ограничений в виде неравенств и упрощается уравнение инфлекционных центров. Оно принимает вид

$$At^4-(B-F)t^3+Ct^2+(G+K)t=0. \qquad (16)$$

Нормировку вектора $\boldsymbol{e}_3$, т.е. фиксацию формы π_3^3, можно проводить по разному. В частности, можно потребовать, чтобы точка $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}_3$ стала инфлекционным центром (тем самым предполагается наличие минимум двух различных действительных инфлекционных центров), то есть потребовать, чтобы ур. (16) удовлетворялось при $t=1$. Эта фиксация имеет вид

$$A-(B-E)+C+G+K=0,\ \pi_3^3=0,\ A-C-2(G+K)\neq 0. \quad (17)$$

Теперь все коэффициенты $A,B,C,E,F=-H,G,K$ стали инвариантами.

Оставшуюся вторичную форму π_2^3 можно зафиксировать лишь на следующем этапе канонизации репера. Это приведёт к аннулированию какого-нибудь из коэффициентов формул

$$\omega_3^3=q_\alpha\tilde{\omega}^\alpha,\ \omega_2^1=p_\alpha\tilde{\omega}^\alpha,\ \omega_1^3=r_\alpha\tilde{\omega}^\alpha,\ \omega_2^3=s_\alpha\tilde{\omega}^\alpha,$$

где

$$\tilde{\omega}^1=\omega^1,\ \tilde{\omega}^2=\omega_3^1,\ \tilde{\omega}^3=\omega_3^2,\ \tilde{\omega}^4=\theta,\ \alpha=1,2,3,4.$$

Основная система внешних дифференциальных уравнений принимает вид

$$\Delta A\wedge\omega^1+\Delta B\wedge\omega_3^1+\Delta C\wedge\omega_3^2+\Delta\xi\wedge\theta=0,$$
$$\Delta E\wedge\omega^1+\Delta F\wedge\omega_3^1+\Delta G\wedge\omega_3^2+\Delta\eta\wedge\theta=0, \qquad (18)$$
$$\Delta H\wedge\omega^1+\Delta K\wedge\omega_3^1+\Delta\zeta\wedge\theta=0,$$

$$\Delta q_\alpha\wedge\tilde{\omega}^\alpha=\Delta p_\alpha\wedge\tilde{\omega}^\alpha=\Delta r_\alpha\wedge\tilde{\omega}^\alpha=\Delta s_\alpha\wedge\tilde{\omega}^\alpha=0. \qquad (19)$$

Мы не будем выписывать точные значения выражений $\Delta A,...,\Delta s_\alpha$, так как и без этого легко устанавливается стандартность системы (18, 19). В силу (15) и (17) можно считать ΔA и ΔF линейно-зависимыми от остальных векторов $\Delta B,...,\Delta\zeta$ системы (18). Поэтому уравнения (18) образуют стандартную подсистему, не влияющую на старший характер всей системы. В четырёх уравнениях системы (19) за счёт последней фиксации (форма π_2^3) снизится на единицу старший характер системы, т.е. $s_4=3$.

Таким образом, после проведения последней фиксации, система (18, 19) будет иметь решение, зависящее от трёх функций четырёх аргументов. Это соответствует трём функциям, фигурирующим в ур. (4) и определяющим произвол задания неголономного линейчатого комплекса в трёхмерном пространстве.

Что касается геометрического значения инвариантов, а также фиксации (15), то для части из них оно очевидно из предыдущего, для других может быть найдено при исследовании других ассоциирующихся с неголономным комплексом геометрических образов. В частности, ξ, η и ζ являются инвариантами регулюсов, сопряжённых (в соответствии с теорией И.А. Печникова [10]) с рассматриваемым неголономным комплексом. Такой регулюс геометрически характеризуется тем, что все точки его произвольного луча являются точками прикосновения, т.е. касательные плоскости во всех точках X луча регулюса совпадают с плоскостями, соответствующими X в главной корреляции комплекса.

2. Неголономные конгруэнции *W* первого и второго рода

Неголономную конгруэнцию в линейчатом комплексе определяет одно не вполне интегрируемое уравнение Пфаффа относительно трёх основных параметров комплекса. Теория неголономных конгруэнций W в голономном комплексе, подробно изложена в [11] (о голономных конгруэнциях W в голономном комплексе см. [12]). Неголономная конгруэнция W, принадлежащая голономному комплексу, имеет два характеристических свойства: 1) асимптотические линии в фокальных системах соответствуют, 2) фокусы являются инфлекционными центрами комплекса. В неголономном комплексе происходит расщепление: двум указанным свойствам соответствуют два различных класса неголономных конгруэнций. Соответствие асимптотических определяет *неголономные конгруэнции W первого рода*. Совпадение фокусов с инфлекционными центрами – *неголономные конгруэнции W второго рода*.

Покажем, что в неголономном комплексе существует бесконечное множество конгруэнций W первого рода (содержащих фиксированный луч).

Цилиндрическую неголономную конгруэнцию (один из её торсов – цилиндр), принадлежащую неголономному комплексу (6), можно задать уравнением

$$\omega\equiv\omega^1-\alpha\omega_3^1-\beta\omega_3^2=0. \qquad (20)$$

Если $\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{A}+t_i\boldsymbol{e}_3$ $(i=1,2)$ – фокусы цилиндрической неголономной конгруэнции, то для нахождения t_i получаем

$$t^2+\alpha t-\beta=0$$

или

$$t_1+t_2=-\alpha,\ t_1t_2=\beta. \qquad (21)$$

Для асимптотических линий фокальной системы F_i получаются уравнения

$$(\omega_3^1+t_i\omega_3^2)[-dt_j+t_j^2\omega_1^2-t_j(\omega_3^3-2\omega_1^1)+\omega_2^1-\omega^3]+$$
$$+(\omega_3^1+t_j\omega_3^2)(dt_i+t_i\omega_3^3+\omega^3)=0, \quad j=1,2, \quad j\neq i.$$

Положим

$$\Delta t_i\equiv dt_i+t_i\omega_3^3+\omega^3\big|_{\theta=\omega=0}=a_i\omega_3^1+b_i\omega_3^2. \qquad (22)$$

Тогда уравнения асимптотических линий можно записать в виде

$$X_{i1}(\omega_3^1)^2+X_{i2}\omega_3^1\omega_3^2+X_{i3}(\omega_3^2)^2=0, \qquad (23)$$

где

$$X_{i1}=A_1t_j^2+A_2t_j+A_3+a_i-a_j,$$
$$X_{i2}=B_1t_j^2+(B_2+a_i)t_j+(A_3-a_j)t_i+B_3+b_i-b_j, \qquad (24)$$
$$X_{i3}=(C_1+b_i)t_j+(C_2-b_j)t_i+C_3,$$

причём

$$A_1=-A\alpha-B,\ A_2=H-E\alpha,\ A_3=H\alpha+K,$$
$$B_1=-A\beta-C,\ B_2=\beta(B-E)+A\alpha\beta+G,\ B_3=E\alpha\beta,$$
$$C_1=-B\beta,\ \ C_2=H\beta,\ \ C_3=(F+G)\beta.$$

Теперь уравнения

$$\frac{X_{11}+X_{21}}{X_{21}}=\frac{X_{12}+X_{22}}{X_{22}}=\frac{X_{13}+X_{23}}{X_{23}}, \qquad (25)$$

определяющие неголономные конгруэнции W первого рода в виде (20), существенно содержат в силу (22–24) частные производные функций t_1 и t_2 (а значит и α, β) по основным параметрам. Это и доказывает существование бесконечного множества этих неголономных конгруэнций.

Различных неголономных конгруэнций W второго рода имеется не более шести. В самом деле, если все четыре инфлекционных центра на луче неголономного комплекса различны, то они образуют шесть различных пар. Каждая из этих пар определяет неголономную конгруэнцию W второго рода. Уже отсюда следует различие двух классов неголономных конгруэнций W.

Если один из фокусов неголономной конгруэнции второго рода совпадает с инфлекционным центром, являющимся началом репера, то $t_1=0$, $t_2=-\alpha$, $\beta=0$. Эта неголономная конгруэнция имеет уравнение $\omega^1=\alpha\omega_3^1$, где α удовлетворяет ур. (16), т.е

$$A\alpha^3+(E-B)\alpha^2+C\alpha-(G+K)=0. \qquad (26)$$

Если второй фокус совпадает с инфлекционным центром $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}_3$, то (26) становится тождеством в силу (16), а уравнение конгруэнции примет вид $\omega^1=-\omega_3^1$, то есть $t_1=0$, $t_2=1$. Непосредственная подстановка этих значений в (22–24) даёт

$$X_{13}+X_{23}=0,\ X_{12}+X_{22}=-\,(L+M),\ X_{11}+X_{21}=-(L+M), \qquad (27)$$

при вычислении учитываются фиксации (15) и (17).

Таким образом, неголономная конгруэнция W второго рода $\omega^1=-\omega_3^1$ является неголономной конгруэнцией первого рода только в комплексе

$$L+M=0. \qquad (28)$$

Следовательно, класс неголономных конгруэнции W второго рода не является частью класса неголономных конгруэнций первого рода.

Замечание. В некоторых работах, например, в [13], нумерация родов неголономных конгруэнций изменена.

3. Главные регулюсы первого и второго рода

Ещё одно «расщепление» обнаруживается при рассмотрении понятия, аналогичного понятию главного регулюса в голономном комплексе [2. С. 31; 14. С. 209]. Возможны два определения, соответствующие двум характеристическим свойствам главного регулюса в голономном комплексе. В неголономном случае они приводят к разным регулюсам.

Главным регулюсом первого рода называется такой регулюс в неголономном комплексе, у которого линии прикосновения совпадают с асимптотическими линиями.

Точки прикосновения $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}+\varphi\boldsymbol{e}_3$ на луче для регулюса $\omega^1:\omega_3^1:\omega_3^2$ определяются так же, как и в голономном случае – совпадением касательной плоскости $\{\boldsymbol{e}_3,(\omega^1+\varphi\omega_3^1)\boldsymbol{e}_1+(\omega^2+\varphi\omega_3^2)\boldsymbol{e}_2\}$ к регулюсу в точке $\boldsymbol{P}$ и касательной плоскости торса, имеющего точку $\boldsymbol{P}$ фокусом. Последняя определяется бивектором $\{\boldsymbol{e}_3,\ \varphi\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\}$. В силу (6) линии прикосновения определяются уравнением

$$\varphi^2\omega_3^2+2\varphi\omega_3^1+\omega^1=0.$$

Находя уравнение асимптотических линий на том же регулюсе и упрощая это уравнение, получаем

$$\varphi^2\omega_1^2+2\varphi\omega_1^1-(\omega^3+\omega_2^1)=0.$$

Беря значения форм из (7), получаем параметрические уравнения

$$A\omega^1+B\omega_3^1+(C-\lambda)\omega_3^2=0,$$
$$E\omega^1-(H+2\lambda)\omega_3^1+G\omega_3^2=0, \qquad (29)$$
$$(H+\lambda)\omega^1+K\omega_3^1=0.$$

Главные регулюсы первого рода получаются отсюда при значениях λ, удовлетворяющих характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} A & B & C-\lambda \\ E & -(H+2\lambda) & G \\ H+\lambda & K & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Главным регулюсом второго рода называется не являющийся торсом регулюс, принадлежащий двум различным неголономным конгруэнциям W второго рода, т.е. являющийся их «пересечением» (на диаграмме Циндлера этот регулюс будет точкой пересечения двух прямых, соответствующих указанным неголономным конгруэнциям).

Так как две неголономные конгруэнции W второго рода, имеющие общий фокус, «пересекаются» по торсу, то главные регулюсы второго рода получаются при пересечении таких неголономных конгруэнций второго рода, которые не имеют общих фокусов. Следовательно, число главных регулюсов второго рода равно трём (если, конечно, нет кратных инфлекционных центров).

Найдём один из главных регулюсов второго рода. В силу фиксаций (14) и (17) два инфлекцион-

ных центра суть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}_3$. Неголономная конгруэнция второго рода (обозначим её W_{12}), имеющая эти точки фокусами, задаётся уравнением

$$\omega^1+\omega_3^1=0.$$

Другая неголономная конгруэнция W второго рода (обозначим её W_{34}) имеет фокусами два других инфлекционных центра, которые являются корнями уравнения, получающегося делением (9) на $t(t+1)$:

$$At^2+(A-B+E)t-(G+K)=0$$

или – с учётом обозначений (12) – из уравнения

$$At^2+(A-N+2E)t+M-2K=0.$$

Поэтому неголономная конгруэнция W_{34} имеет уравнение

$$\omega^1=\alpha\omega_3^1+\beta\omega_3^2,$$

где в силу (20) и (21)

$$\alpha=\frac{A-N+2E}{A},\quad \beta=\frac{2K-M}{A},$$

а главный регулюс второго рода, являющийся пересечением W_{12} и W_{34}, определяется отношением

$$\omega^1:\omega_3^1:\omega_3^2=\beta:(-\beta):(\alpha+1)$$

или

$$\omega^1:\omega_3^1:\omega_3^2=(2K-M):(M-2K):(2A+2E-N). \qquad (30)$$

4. Достаточные геометрические условия голономности

Мы уже знаем, что совпадение центров первого и второго рода эквивалентно обращению в нуль инварианта N – одной из компонент тензора неголономности $\{N,-L, M\}$ (см. § 1). Другие результаты такого типа сформулируем в виде лемм.

Лемма 1. Неголономная конгруэнция W второго рода с фокусами в двух инфлекционных центрах $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}_3$ является неголономной конгруэнцией W первого рода тогда и только тогда, когда $L=-M$.

Доказательство фактически приведено в конце § 2, где получено соотношение (28) из условий данной леммы.

Лемма 2. Две различные неголономные конгруэнции W, имеющие фокусом инфлекционный центр $\boldsymbol{A}$ (начало репера), будут неголономными конгруэнциями $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$ первого и второго рода одновременно только при $L=M=0$.

Доказательство. Все неголономные конгруэнции второго рода, имеющие фокусом инфлекционный центр $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$, имеют уравнения

$$\omega^1=\alpha_k\omega_3^1,\quad k=1,2,3.$$

Следовательно, для координат фокусов имеем $t_1=0$, $t_2=-\alpha_k$. Вычислив при этих условиях отношения (25), получим соотношения, аналогичные (27):

$$X_{13}+X_{23}=0,\ X_{12}+X_{22}=-L\alpha_k^2-M\alpha_k,$$
$$X_{11}+X_{21}=L\alpha_k+M,$$

где учтено, что α_k – суть корни ур. (26). Таким образом, при k=1,2,3 имеем

$$L\alpha_k+M=0.$$

Так как по крайней мере два из α_k различны, то $L=M=0$.

Лемма 3. Главный регулюс второго рода, являющийся пересечением неголономных конгруэнций W второго рода W_{12} и W_{34} становится главным регулюсом первого рода только при условии выполнения двух равенств:

$$(2L-M)(A-B)+N(L-K)=0, \qquad (31)$$
$$M(2A+3E-H)-K(N-2L)=0. \qquad (32)$$

Доказательство получается внесением (30) в результат исключения λ из (29) с учётом проведённых фиксаций.

Следующие теоремы дают геометрические достаточные условия голономности.

Теорема 1. Если две неголономные конгруэнции, имеющие общим фокусом инфлекционный центр $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$, являются одновременно неголономными конгруэнциями W первого и второго рода и аффинные центры первого и второго рода совпадают, то комплекс является голономным.

Доказательство. Лемма 2 даёт $L=M=0$, а совпадение аффинных центров и второго рода – $N=0$. В итоге получается достаточное условие голономности комплекса.

Теорема 2. Если неголономная конгруэнция с фокусами в некратных инфлекционных центрах $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{e}_3$ является неголономной конгруэнцией первого и второго рода одновременно, главный регулюс второго рода, представляющий собой пересечение неголономных конгруэнций W_{12} и W_{34}, есть главный регулюс первого рода и аффинные центры совпадают, то комплекс – голономен.

Доказательство. При $N=0$ и $L=M=0$ (лемма 1) условия (31) и (32) принимают вид

$$M(A-B)=0,\quad M\{A-B+2(G+K)\}=0. \qquad (33)$$

Так как центр $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$ не кратен, то в силу (14) имеем $G+K\neq0$. Следовательно, соотношения (33) совместны только при $M=0$. В итоге $L=M=N=0$, и комплекс голономен.

Теорема 3. Если две неголономные конгруэнции с общим фокусом в некратном инфлекционном центре $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$ являются неголономными конгруэнциями W первого и второго рода одновременно, а главный регулюс второго рода, являющийся пересечением неголономных конгруэнций W_{12} и W_{34}, есть главный регулюс первого рода, то комплекс голономен.

Доказательство. В силу леммы 2 имеем $L=M=0$. Внося эти условия в (31) и (32) леммы 3, получаем $NK=0$. Если $K=0$, то из $M=K-G$ получается $G=0$, и инфлекционный центр $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}$ в силу (9) становится кратным. Поэтому $N=0$ и $L=M=N=0$. Комплекс голономен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щербаков Р.Н. Щербаков Н.Р. Построение репера неголономной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 3. – С. 11–16.
2. Кованцов Н.И. Теория комплексов. – Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1963. – 292 с.
3. Щербаков Р.Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. – Томск: Изд-во ТГУ, 1973. – 236 с.
4. Кованцов Н.И. К теории неголономных комплексов // Докл. Второй сибирской конф. по матем. и мех. – Томск, 1962. – С. 85–87.
5. Щербаков Р.Н. Эквиаффинная теория комплексов прямых // Докл. научной конф. по теоретич. и прикладным вопросам математики и механики. – Томск, 1960. – С. 82–83.
6. Щербаков Р.Н. Основной цилиндроид линейчатого комплекса // Известия вузов. Математика. – 1962. – № 3 (28). – С. 177–178.
7. Гринцевичюс К.И. О неголономном комплексе // Литовский математический сб. – 1969. – Т. 9. – № 1. – С. 85–99.
8. Близникас В.И. Некоторые вопросы теории неголономных комплексов // Труды геометрического семинара. – М.: Изд-во ВИНИТИ, 1974. – № 5. – С. 69–96.
9. Барыктабасов Э.Д. К эквиаффинной теории неголономных комплексов. О связи неголономных конгруэнций *W* с точками неголономности // Труды Томского ун-та. Геометрический сб. – 1975. – Т. 258. – № 15. – С. 122–151.
10. Печников И.А. Репераж сопряжённых пар пфаффовых подмногообразий // Геометрический сб. – 1978. – № 19. – С. 122–126.
11. Щербаков Р.Н. О неголономных конгруэнциях *W* // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 138. – № 4. – С. 802–804.
12. Кованцов Н.И. Линейчато-геометрический аналог триортогональной системы поверхностей // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 113. – № 3. – С. 497–500.
13. Барыктабасов Э.Д. Неголономные конгруэнции в неголономном комплексе // Тр. Томского ун-та. Геометрический сб. – 1974. – Т. 255. – № 14. – С. 172–191.
14. Широков П.А., Широков А.П. Аффинная дифференциальная геометрия. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – 319 с.

УДК 519.865